Rototraslazione ai minimi quadrati - *di Gianni Rossi g.rossi@tecnobitmail.com*

Questo algoritmo esegue la rototraslazione di punti omologhi presenti in due diversi sistemi di riferimento. Matematicamente, per trasformare le coordinate da un sistema di riferimento all'altro, è necessario conoscere le coordinate di minimo due punti in entrambi i sistemi. Questo perché, come vedremo tra breve, dobbiamo risolvere un sistema di 4 equazioni.

La Fig. 1 illustra lo schema geometrico della rototraslazione: E_O e N_O sono le traslazioni tra l'origine del sistema di riferimento X-Y (da rototraslare) e l'origine del sistema di riferimento N-E (sul quale rototraslare), mentre ε è l'angolo di rotazione tra i due sistemi. Per trasformare le coordinate dei punti *P* e *Q* dal sistema X-Y a quello N-E, dobbiamo applicare le seguenti formule:

$$e_p = E_O + AP = E_O + AB + BP$$

$$n_p = N_O + O'A = N_O + O'C - AC$$

$$e_q = E_O + DQ = E_O + DE + EQ$$

$$n_q = N_O + O'D = N_O + O'F - FD$$

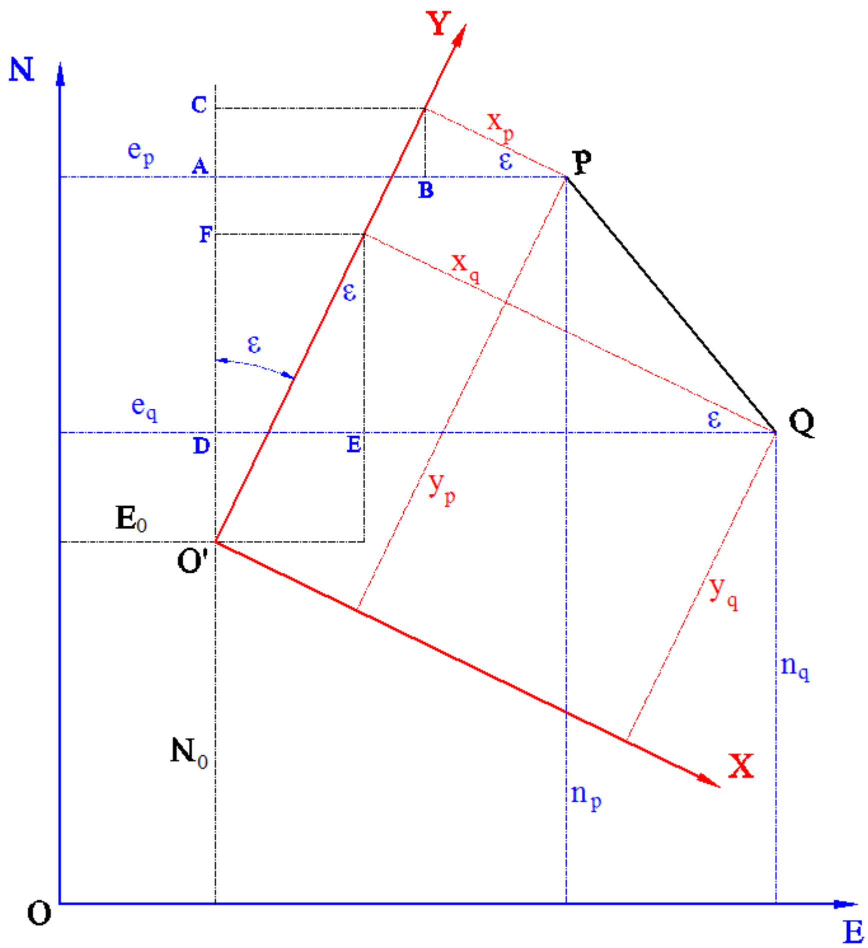

Fig. 1 – *lo schema geometrico della rototraslazione piana tra due sistemi di riferimento.*

Sostituendo le distanze *AB, BP, O'C, AC, DE, EQ, O'F, FD* con i loro valori calcolati in funzione delle coordinate X_p, Y_p e X_q, Y_q e dell'angolo ε, le formule diventano:

$$\begin{aligned}
e_p &= E_O + y_p \sin\varepsilon + x_p \cos\varepsilon \\
n_p &= N_O + y_p \cos\varepsilon - x_p \sin\varepsilon \\
e_q &= E_O + y_q \sin\varepsilon + x_q \cos\varepsilon \\
n_q &= N_O + y_q \cos\varepsilon - x_q \sin\varepsilon
\end{aligned}$$

E, riordinandole con le *x* prima e le *y* dopo:

$$\begin{aligned}
e_p &= E_O + x_p \cos\varepsilon + y_p \sin\varepsilon \\
n_p &= N_O - x_p \sin\varepsilon + y_p \cos\varepsilon \\
e_q &= E_O + x_q \cos\varepsilon + y_q \sin\varepsilon \\
n_q &= N_O - x_q \sin\varepsilon + y_q \cos\varepsilon
\end{aligned} \qquad \textbf{[1]}$$

Per un generico punto P queste equazioni possono essere scritte più comodamente in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} e_P \\ n_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_o \\ N_o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix} \qquad \textbf{[2]}$$

In questo caso, di soli due punti noti nei due sistemi di riferimento, la rototraslazione si dice “rigida” o “fissa” proprio perché obbedisce a queste formule “chiuse”, che non danno cioè adito a scarti. Ma naturalmente in Topografia è sempre opportuno abbondare nei punti di inquadramento, proprio per avere un controllo sull’affidabilità degli stessi. In questo caso la cosa si complica perché con tre o più punti le inevitabili imprecisioni tra le mutue posizioni dei punti stessi danno luogo ad un fattore di scala tra i due sistemi di riferimento. In altre parole, i due sistemi di riferimento non hanno la stessa scala ma una scala, sia pur leggermente, diversa. Per esempio, aggiungendo un terzo punto R, il fattore di scala f che si genera, trasforma le formule [1] di cui sopra nelle seguenti:

$$\begin{aligned}
e_p &= E_O + f\, x_p \cos\varepsilon + f\, y_p \sin\varepsilon \\
n_p &= N_O - f\, x_p \sin\varepsilon + f\, y_p \cos\varepsilon \\
e_q &= E_O + f\, x_q \cos\varepsilon + f\, y_q \sin\varepsilon \\
n_q &= N_O - f\, x_q \sin\varepsilon + f\, y_q \cos\varepsilon \\
e_r &= E_O + f\, x_r \cos\varepsilon + f\, y_r \sin\varepsilon \\
n_r &= N_O - f\, x_r \sin\varepsilon + f\, y_r \cos\varepsilon
\end{aligned} \qquad \textbf{[3]}$$

Per cui la formula matriciale [2] per un generico punto P diventa:

$$\begin{vmatrix} e_P \\ n_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_o \\ N_o \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix}$$

Questa notazione rende evidente il motivo per cui questa trasformazione viene chiamata “a 4 parametri”. Ci sono infatti 4 valori da calcolare per poter trasformare le coordinate dal sistema di riferimento X-Y a quello N-E, essi sono: $\boldsymbol{E_O}$, $\boldsymbol{N_O}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{f}$, cioè due traslazioni (Est e Nord), una rotazione e un fattore di scala. Come facciamo a calcolare questi 4 parametri? Dobbiamo ovviamente risolvere il sistema di equazioni [3] che, trascritto in forma canonica, con lo zero a destra dell’uguale, è:

$$\begin{aligned}
E_O + f\, x_p \cos\varepsilon + f\, y_p \sin\varepsilon - e_p &= 0 \\
N_O - f\, x_p \sin\varepsilon + f\, y_p \cos\varepsilon - n_p &= 0 \\
E_O + f\, x_q \cos\varepsilon + f\, y_q \sin\varepsilon - e_q &= 0 \\
N_O - f\, x_q \sin\varepsilon + f\, y_q \cos\varepsilon - n_q &= 0 \\
E_O + f\, x_r \cos\varepsilon + f\, y_r \sin\varepsilon - e_r &= 0 \\
N_O - f\, x_r \sin\varepsilon + f\, y_r \cos\varepsilon - n_r &= 0
\end{aligned} \qquad \textbf{[4]}$$

Ma questo sistema è sovra-determinato perché contiene un numero di equazioni (6) maggiore del numero delle incognite (4). Questo significa che, se noi prendiamo 4 equazioni alla volta, ad esempio le due di P e le due di Q, e le risolviamo, il risultato non soddisferà le due equazioni di R. Stesso discorso per le altre combinazioni: il risultato di P ed R non soddisferà Q e quello di Q e R non soddisferà P.

In pratica, ciascuna equazione, anziché essere pari a zero, dà luogo ad uno scarto:

$$E_O + f\, x_p \cos\varepsilon + f\, y_p \sin\varepsilon - e_p = \Delta E_p$$
$$N_O - f\, x_p \sin\varepsilon + f\, y_p \cos\varepsilon - n_p = \Delta N_p$$
$$E_O + f\, x_q \cos\varepsilon + f\, y_q \sin\varepsilon - e_q = \Delta E_q$$
$$N_O - f\, x_q \sin\varepsilon + f\, y_q \cos\varepsilon - n_q = \Delta N_q$$
$$E_O + f\, x_r \cos\varepsilon + f\, y_r \sin\varepsilon - e_r = \Delta E_r$$
$$N_O - f\, x_r \sin\varepsilon + f\, y_r \cos\varepsilon - n_r = \Delta N_r$$

Ne consegue che la soluzione non può essere univoca ma va determinata con un approccio probabilistico. E qui entra in ballo il metodo dei minimi quadrati, con il quale si rende minima la sommatoria dei quadrati degli scarti Δ, con il risultato che la somma degli scarti stessi sarà pari a zero. Come si risolve tutto ciò? Ripartiamo dal sistema di equazioni [4], che ipotizza l'assenza di scarti, e lo riscriviamo ponendo dapprima:

$$a = f \cos\varepsilon \qquad\qquad b = f \sin\varepsilon$$

poi portiamo a destra dell'uguale i termini noti e_p, n_p, e_q, n_q, e_r, n_r:

$$E_O + a\, x_p + b\, y_p = e_p$$
$$N_O - b\, x_p + a\, y_p = n_p$$
$$E_O + a\, x_q + b\, y_q = e_q$$
$$N_O - b\, x_q + a\, y_q = n_q$$
$$E_O + a\, x_r + b\, y_r = e_r$$
$$N_O - b\, x_r + a\, y_r = n_r$$

e infine riordiniamo le equazioni con il coefficiente *a* sempre prima del coefficiente *b*:

$$\begin{aligned} E_O + a\, x_p + b\, y_p &= e_p \\ N_O + a\, y_p - b\, x_p &= n_p \\ E_O + a\, x_q + b\, y_q &= e_q \\ N_O + a\, y_q - b\, x_q &= n_q \\ E_O + a\, x_r + b\, y_r &= e_r \\ N_O + a\, y_r - b\, x_r &= n_r \end{aligned} \qquad \textbf{[5]}$$

Ricaviamo ora l'espressione matriciale che ne isola le incognite, i loro coefficienti e i termini noti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_p & y_p \\ 0 & 1 & y_p & -x_p \\ 1 & 0 & x_q & y_q \\ 0 & 1 & y_q & -x_q \\ 1 & 0 & x_r & y_q \\ 0 & 1 & y_r & -x_r \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} E_O \\ N_O \\ a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_p \\ n_p \\ e_q \\ n_q \\ e_r \\ n_r \end{vmatrix}$$

Questa moltiplicazione matriciale (righe per colonna) equivale infatti al sistema di equazioni [5]. Le tre matrici di cui si compone vengono in genere dette, nell'ordine:

- matrice disegno A;
- vettore delle incognite X;
- vettore dei termini noti T.

Per cui, scritte in formato compatto si ha:

$$A \bullet X = T \qquad [6]$$

Espressione dalla quale noi dobbiamo ricavare il vettore delle incognite X. Ma, come detto, questo sistema matriciale è incompatibile per l'esuberanza dei termini noti rispetto alle incognite (6 contro 4). Per risolvere il problema si rendono necessari ulteriori passaggi matematici che includono il calcolo di derivate e che esulano dallo scopo di questo documento. Mi limito pertanto a descrivere direttamente la soluzione. L'espressione [6] viene trasformata nella seguente:

$$N \bullet X = Tn \qquad [7]$$

Dove:

- N è la matrice "normale" data dalla moltiplicazione della matrice trasposta di A per A stessa $\qquad N = A^T \bullet A$

- Tn è il vettore dei termini noti "normalizzato" dato dalla moltiplicazione della matrice trasposta di A per T stesso $\qquad Tn = A^T \bullet T$

La moltiplicazione matriciale [7] è ora "consistente", nel senso che il numero delle equazioni è pari al numero delle incognite. Dalla stessa si ricava quindi il vettore delle incognite X moltiplicando il vettore dei termini noti normalizzato per l'inversa della matrice normale:

$$X = N^{-1} \bullet Tn$$

Abbiamo quindi trovato le quattro incognite cercate, cioè E_O, N_O, *a*, *b*. Da questi due ultimi valori *a*, *b* si ricavano poi quelli originari, il fattore di scala *f* e l'angolo di rotazione ε, mediante semplici relazioni trigonometriche.

E gli scarti, che fine hanno fatto?

Noi siamo infatti partiti dal sistema di equazioni [4], che ipotizzava l'assenza di scarti, e da tale sistema abbiamo ricavato la formula matriciale [6]:

$$A \bullet X = T$$

Ma gli scarti invece ci sono, e vanno quindi sommati ai termini noti. Pertanto, indicando con V il vettore degli scarti, la formula corretta diventa:

$$A \bullet X = T + V$$

Ma noi ora abbiamo già calcolato il vettore delle incognite X, per cui gli scarti si ricavano dalla seguente formula matriciale:

$$V = A \bullet X - T$$

Gianni Rossi
g.rossi@tecnobitmail.com
Gianni Rossi