Sistemi di riferimento piani e trasformazioni

Per tradurre i problemi geometrici in problemi di calcolo rappresentiamo le grandezze geometriche (normalmente misurate) in equazioni. Per fare questo è necessario assegnare un sistema di riferimento. La rappresentazione analitica dell'ente geometrico dipende dalla geometria del sistema di riferimento; una sua scelta oculata può mettere in luce alcune peculiarità o particolari proprietà della grandezza che si studia.

SISTEMI DI RIFERIMENTO PIANI

I sistemi di riferimento piani si possono dividere in:

- **Cartesiano ortogonale:** è costituito da una coppia di rette orientate ortogonali fra loro sulle quali è fissata un'origine. Un punto è individuato nel riferimento R(O,X,Y) con le coordinate cartesiane cioè le lunghezze con segno delle proiezioni ortogonali OP_1 e OP_2 (fig.4). Viene spesso utilizzato nella fase di restituzione cartografica o nella fase di calcolo. Raramente viene utilizzato in fase di misura.

- **Polare:** è costituito da un polo e da una semiretta orientata con origine nel polo, sulla quale è fissata un'unità di misura. Un punto P è individuato in un riferimento $R(O,\rho,\vartheta)$ tramite la distanza ρ (lunghezza del tratto OP) e l'angolo di direzione ϑ (fig.7). Per come sono costruiti alcuni strumenti topografici, viene spesso usato come naturale riferimento nelle operazioni di misura.

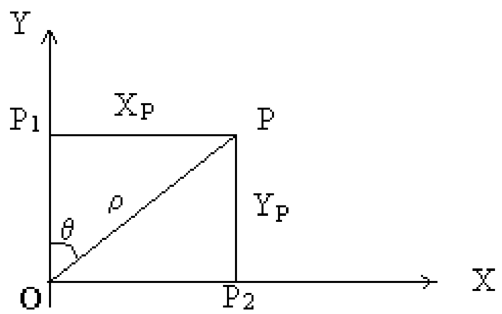


Fig.7. Sistemi di riferimento.

Il passaggio tra i due sistemi si effettua mediante semplici relazioni trigonometriche e geometriche:

1. *Da Polare a Cartesiano:*

$$X_P = \rho \operatorname{sen} \vartheta$$
$$Y_P = \rho \cos \vartheta$$

2. *Da cartesiano a Polare:*

$$\rho = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2}$$
$$\vartheta = \operatorname{arc\,tan} \frac{X_P}{Y_P}$$

Siccome le operazioni di misura e quelle di calcolo e restituzione dell'elaborato cartografico normalmente non sono eseguite negli stessi sistemi di riferimento, occorre eseguire le trasformazioni dirette e inverse tra questi. I prolemi della trasformazione tra sistemi nascono anche in quanto molto spesso è necessario riferire l'elaborato, rappresentato in un riferimento puramente locale, in un sistema globale (quale ad esempio il sistema di coordinate nazionale). Vengono trattati in seguito alcuni problemi geometrici di trasformazione, rimandando ai capitoli successivi le trasformazioni che fanno uso di sistemi geografici e cartografici.

Si analizzano in particolare i seguenti casi:

- traslazione
- rotazione intorno all'origine
- rototraslazione senza variazione di scala (trasformazione congruente)
- rototraslazione con variazione di scala isotropa (trasformazione affine particolare)

- **Traslazione**: Supponiamo di voler eseguire la trasformazione da un sistema locale (O', x, y) ad uno globale (O, X, Y) e che gli assi di detti sistemi siano tra loro paralleli. I parametri geometrici necessari alla trasformazione risultano essere 2 e precisamente le traslazioni delle origini dei due sistemi (a, b). Con riferimento alla figura 8 risulta:

Trasformazione da sistema locale a sistema globale:

$$X_P = x_P + a$$
$$Y_P = y_P + b$$

Trasformazione da sistema globale
a sistema locale

$x_P = X_P - a$

$y_P = Y_P - b$

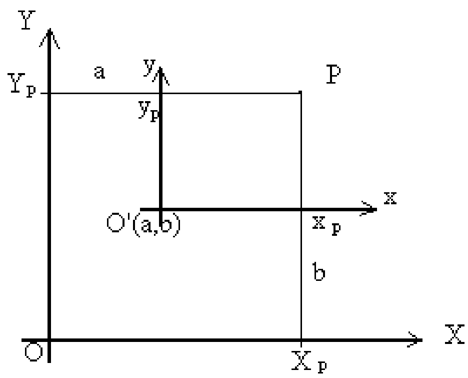


Fig. 8. Traslazione

- **Rotazione intorno all'origine:** Supponiamo di voler eseguire la trasformazione da un sistema globale (O, X, Y) ad uno locale (O, X' Y') e che gli assi di detti sistemi siano tra loro ruotati. Per eseguire la trasformazione è necessaria la conoscenza di un solo parametro e precisamente la rotazione α (la minima rotazione oraria che deve compiere L'asse Y del sistema globale per sovrapporsi all'asse Y' del sistema locale). Con riferimento alla figura 9 risulta:

$\alpha = \vartheta - \vartheta'$

$X_P = \rho \operatorname{sen} \vartheta$
$Y_P = \rho \cos \vartheta$

$X_P' = \rho \operatorname{sen} \vartheta'$
$Y_P' = \rho \cos \vartheta'$

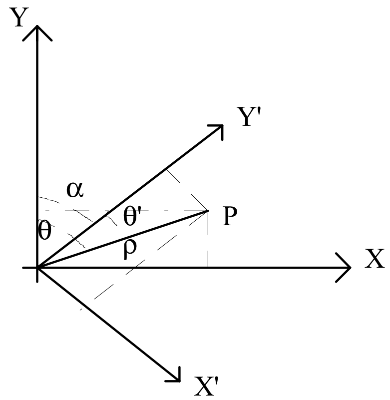


Fig.9. Rotazione intorno all'origine

Per la trasformazione da sistema globale a sistema locale risulta:

$X_P' = \rho \operatorname{sen} (\vartheta - \alpha) = \rho \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha - \rho \cos\vartheta \operatorname{sen}\alpha = X_P \cos\alpha - Y_P \operatorname{sen}\alpha$
$Y_P' = \rho \cos (\vartheta - \alpha) = \rho \cos\vartheta \cos\alpha + \rho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\alpha = X_P \operatorname{sen}\alpha + Y_P \cos\alpha$

In notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} X'_p \\ Y'_P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \end{pmatrix}$$

Analogamente la trasformazione inversa (da sistema locale a globale) sarà data da:

$X_P = \rho \operatorname{sen} (\vartheta' + \alpha) = \rho \cos\vartheta' \operatorname{sen}\alpha + \rho \operatorname{sen}\vartheta' \cos\alpha = X_P' \cos\alpha + Y_P' \operatorname{sen}\alpha$

$Y_P = \rho \cos (\vartheta' + \alpha) = \rho \cos\vartheta' \cos\alpha - \rho \operatorname{sen}\vartheta' \operatorname{sen}\alpha = -X_P' \operatorname{sen}\alpha + Y_P' \cos\alpha$

In notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X'_P \\ Y'_P \end{pmatrix}$$

A considerazioni analoghe si poteva giungere considerando la rotazione antioraria ($-\alpha$) che doveva compiere l'asse Y' del sistema locale per sovrapporsi a Y del sistema globale.

Si noti come l'inversa della matrice di rotazione sia eguale alla sua trasposta ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{t}$)

- **Rototraslazione senza variazione di scala**: risulta dalla combinazione dei due casi precedenti. Supponiamo di voler eseguire la trasformazione da un sistema locale (O, X', Y') ad uno globale (O, X Y) e che gli assi di detti sistemi siano tra loro ruotati e traslati. La trasformazione si può effettuare noti 3 parametri: la rotazione α e le due traslazioni a, b, dell'origine del sistema locale. Con riferimento alla figura 10 le trasformazioni possono essere espresse mediante le:

Trasformazione da sistema locale a globale:

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X'_P \\ Y'_P \end{pmatrix}$$

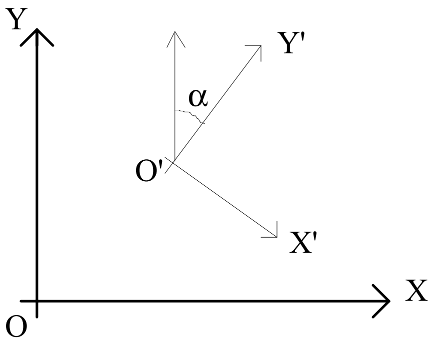


Fig.10. Rototraslazione.

Trasformazione da sistema globale a locale:

$$\begin{pmatrix} X'_p \\ Y'_P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_P - X'_0 \\ Y_P - Y'_0 \end{pmatrix}$$

- **Rototraslazione con variazione di scala isotropa:** la trasformazione è analoga a quella precedente ma contempla il caso che i due sistemi di riferimento siano in una scala diversa. Per effettuare questa trasformazione è allora necessario conoscere 4 parametri e precisamente, i tre precedenti più un fattore di scala λ. In notazione matriciale la trasformazione da sistema locale a globale si può esprimere come:

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X'_P \\ Y'_P \end{pmatrix}$$

e quella inversa (da sistema globale a locale):

$$\begin{pmatrix} X'_p \\ Y'_P \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_P - X'_0 \\ Y_P - Y'_0 \end{pmatrix}$$

Molto spesso il fattore di scala risulta essere dovuto a deformazioni indotte nell'elaborato cartografico dal tipo di rappresentazione, o da stiramenti del supporto cartaceo o ancora dalla propagazione degli errori nelle misure. In Alcuni casi, è utile invece stimare i parametri della trasformazione, con una procedura a ritroso, a partire da un numero sufficiente di punti noti nei due sistemi di riferimento. Il sistema

$$X_0 + \lambda X'_P \cos\alpha + \lambda Y'_P \operatorname{sen}\alpha - X_P = 0$$
$$Y_0 - \lambda X'_P \operatorname{sen}\alpha + \lambda Y'_P \cos\alpha - Y_P = 0$$

nelle incognite X_0, Y_0, λ, α può essere linearizzato semplicemente sostituendo:

$a = \lambda\cos\alpha$
$b = \lambda\operatorname{sen}\alpha$

Per risolvere il sistema nei quattro parametri incogniti X_0, Y_0,a, b:

$$X_0 + aX'_P + bY'_P - X_P = 0$$
$$Y_0 + aY'_P - bX'_P - Y_P = 0$$

è necessario disporre di almeno 4 equazioni, derivanti dalla conoscenza di almeno due punti di coordinate note nei due sistemi di riferimento. Ricavati i 4 parametri si può risalire all'angolo α e al fattore di scala λ mediante le:

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

I modelli di trasformazione possono essere ulteriormente ampliati, introducendo ulteriori parametri che modellizzano effetti più complessi di cambio di sistema di riferimento e deformazioni eventuali. Non vengono in questa sede affrontate le trasformazioni affini (5 e 6 parametri) e omografiche (7 e 8 parametri).

Esercizio

Siano date le coordinate di 4 punti espresse in un sistema di riferimento locale:

X'_1= 120.37 m X'_2 =215.51 m X'_3 =150.14 m X'_4 =392.12 m
Y'_1= 85.95 m Y'_2 = 321.07 m Y'_3 =412.30 m Y'_4 =49.75 m

Le coordinate dei punti 1 e 2 sono pure note in un sistema di riferimento globale

X_1= 1214.17 m X_2 = 1338.59 m
Y_1= 1417.61 m Y_2 = 1638.56 m

Si vogliono ricavare i parametri della trasformazione da sistema locale a globale e le coordinate dei punti 3, 4 nel sistema globale.

Il sistema può essere scritto nella forma estesa:

X_0 + 120.37 a + 85.95 b - 1214.17 = 0
Y_0 + 85.95 a - 120.37 b - 1417.61 = 0
X_0 + 215.51 a + 321.07 b - 1338.59 = 0
Y_0 + 321.07 a - 215.51 b - 1638.56 = 0

e in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 120.37 & 85.95 \\ 0 & 1 & 85.95 & -120.37 \\ 1 & 0 & 215.51 & 321.07 \\ 0 & 1 & 321.07 & -215.51 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1214.17 \\ 1417.61 \\ 1338.59 \\ 1638.56 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema avviene una volta invertita la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4921 & 0.3128 & -0.4921 & -0.3128 \\ -0.3128 & 1.4921 & 0.3128 & -0.4921 \\ -0.0015 & -0.0036 & 0.0015 & 0.0037 \\ -0.0036 & 0.0015 & 0.0037 & -0.0015 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1214.17 \\ 1417.61 \\ 1338.59 \\ 1638.56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1083.82 \\ 1347.79 \\ 0.991514 \\ 0.127966 \end{pmatrix}$$

da cui sono ricavabili i valori di
λ = 0.999737
α = 8.1711 gon

Le coordinate dei punti 3 e 4 nel sistema globale sono ricavabili dalle:

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1083.82 \\ 1347.79 \end{pmatrix} + 0.999737 \begin{bmatrix} \cos 8.1711 & \operatorname{sen} 8.1711 \\ -\operatorname{sen} 8.1711 & \cos 8.1711 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 150.14 \\ 412.30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1285.45 \\ 1737.38 \end{pmatrix} m$$

X_4 = 1478.98 m $\quad$ Y_4 = 1346.94 m

Passaggio dalle coordinate polari alle cartesiane e viceversa

- Si conoscono le coordinate cartesiane ortogonali del punto P

XP = 123,16 m
YP = 160,04 m

- Si conoscono le coordinate cartesiane dei punti A e B

A (78,94;81,36)
B (316,98;243,82)

Determinare angolo di direzione e distanza.

- Si conoscono le coordinate polari del punto P

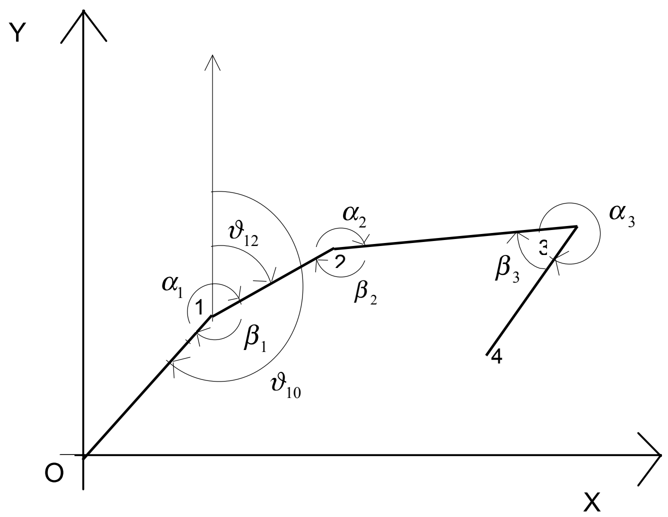
d = 201,94 m
θ = 37°34’49’’

- Si conoscono le coordinate cartesiane ortogonali del punto A (78,94;81,36) e le coordinate polari del punto B rispetto A [d = 81,36 m; θ= 55°41’13’’]

Determinare le coordinate di B

Trasporto dell’angolo di direzione e di coordinate piane

E’ un caso che spesso si presenta in topografia quando si misurando lunghezze di lati di una spezzata e angoli tra loro compresi. Si supponga dunque uno schema come in figura, dove si siano misurati angoli orari tra i lati della spezzata rappresentata nonche' le lunghezze di tali lati. Per assegnare il sistema di riferimento devono ancora essere note per lo meno le coordinate di un punto (per esempio quello di inizio X_O, Y_O) e un angolo di direzione (per esempio quella del primo lato ϑ_{O1})



trasporto dell'angolo di direzione

Si stabilisca la seguente convenzione: scelto un senso di percorrenza della spezzata, l'angolo (α) considerato (e che in genere viene misurato) è la minima rotazione oraria necessaria a sovrapporre il lato precedente (PI) al successivo (PA).
Per determinare le coordinate di tutti i punti è conveniente trovare l'angolo di direzione di tutti i lati della spezzata: con la convenzione stabilita risulta:

$\vartheta_{1O} = \vartheta_{O1} \pm \pi$ (calcolo dell'angolo di direzione reciproco)
$\vartheta_{12} = \vartheta_{1O} + \alpha_1$ Se ϑ_{12} eccede l'angolo giro è necessario sottrarre 2π

$\vartheta_{21} = \vartheta_{12} \pm \pi$ (calcolo dell'angolo di direzione reciproco)
$\vartheta_{23} = \vartheta_{21} + \alpha_2$ Se ϑ_{23} eccede l'angolo giro è necessario sottrarre 2π
In generale risulta:

$\vartheta_{i,\, i-1} = \vartheta_{i-1,\, i} \pm \pi$ (calcolo dell'angolo di direzione reciproco)
$\vartheta_{i,\, i+1} = \vartheta_{i,\, i-1} + \alpha_i$ Se ϑ_{23} eccede l'angolo giro è necessario sottrarre 2π

In certi casi può risultare conveniente riferirsi agli angoli interni (β) piuttosto che a quelli precedentemente utilizzati. Ne risulta:

$\vartheta_{1O} = \vartheta_{O1} \pm \pi$ (calcolo dell'angolo di direzione reciproco)
$\vartheta_{12} = \vartheta_{10} - \beta_1$ Se $\vartheta_{12} < 0$ allora $\vartheta_{12} = \vartheta_{12} + 2\pi$

in generale risulta:

$\vartheta_{i,\, i-1} = \vartheta_{i-1,\, i} \pm \pi - \beta_i$ calcolo dell'angolo di direzione reciproco)
$\vartheta_{i,\, i+1} = \vartheta_{i,\, i-1} - \beta_i$ Se $\vartheta_{i,i+1} < 0$ allora $\vartheta_{i,i+1} = \vartheta_{i,i+1} + 2\pi$

Le coordinate dei vertici della spezzata vengono immediatamente ottenute dalle:

$X_1 = X_O + l_{O1} \text{ sen } \vartheta_{O1}$
$Y_1 = Y_O + l_{O1} \cos \vartheta_{O1}$

in generale risulta:

$X_i = X_{i-1} + l_{i-1,\, i} \text{ sen } \vartheta_{i-1,\, i}$
$Y_1 = Y_{i-1} + l_{i-1,\, i} \cos \vartheta_{i-1,\, i}$

Ing. Andrea Lingua
Arch.Elena Albery

Esercizio

In una spezzata di 5 vertici con senso di percorrenza secondo la numerazione crescente, sono state misurate le lunghezze dei lati:

l_{12} = 80.43 m
l_{23} = 69.19 m
l_{34} = 57.82 m
l_{45} = 95.42 m

e le rotazioni orarie che deve compiere il lato precedente per sovrapporsi al successivo:

α_2 = 272.71gon
α_3 = 143.56gon
α_4 = 301.54 gon

Il sistema di riferimento è stato scelto con origine nel punto 1 e in maniera che il lato 12 formi un angolo con l'asse Y pari a:

ϑ_{12} = 47.35 gon

Determinare le coordinate di tutti i vertici.

Soluzione:

☞ Calcolo degli angoli di direzione:

ϑ_{12} = 47.35 gon
ϑ_{23} = 120.06 gon
ϑ_{34} = 63.62 gon
ϑ_{45} = 165.16 gon

☞ Calcolo coordinate:

X_1 = 0 m
X_2 = 54.46 m
Y_1 = 0 m
Y_2 = 59.19 m

X_3 = 120.24 m
X_4 = 168.87 m
X_5 = 218.52 m
Y_3 = 37.75 m
Y_4 = 69.07 m
Y_5 = -12.46 m