

TOPOGRAFIA

Il geometra Renato Righi ha sottoposto al prof. Giorgio Folloni, Ordinario della cattedra di topografia e geodesia dell'Università di Bologna, una sua soluzione del classico problema di Pothenot — Il prof. Folloni ha trovato il lavoro corretto dal punto di vista analitico e non privo di spunti interessanti

1) Considerazioni generali

Se si dispone delle sole osservazioni azimutali su tre punti di coordinate note, è possibile calcolare le coordinate del punto di osservazione col metodo classico di Pothenot, a tutti ben noto.

Il nuovo metodo, proposto nelle persenti note, giungendo anche più rapidamente al risultato finale, offre alcune vantaggi.

I principali sono:

- 1) facilità di calcolo;
- 2) possibilità di determinare a scelta uno qualsiasi degli angoli cercati;
- 3) possibilità di controllo dei risultati (non altrettanto possibile col metodo classico);
- 4) maggior attendibilità dei risultati.

Nella risoluzione del problema possono verificarsi tre casi, come dalle Fig. 1-2-3 relative ai dettagli dei triangoli considerati a Tav. 1.

Per ciascuno di essi la formula risolutiva è la stessa; varia soltanto il valore dell'angolo ω (angolo ausiliario) determinato per differenza di angoli noti, da applicarsi alla formula medesima.

Nella dimostrazione che segue la formula determina l'angolo γ , della figura 1, ed è facilmente adattabile a qualsiasi altro angolo, ed in qualsiasi caso, mutando in essa l'ordine degli elementi noti.

Ne consegue che, seguendo sempre il caso di fig. 1, cambiando opportunamente l'ordine dei dati noti ed il valore di ω (differenza fra angolo di stazione «S» ed il corrispondente angolo opposto allo stesso lato) si riesce a calcolare i valori degli angoli $\alpha_1 - \alpha_{II} - \beta_1 - \beta_{II} - \gamma_1 - \gamma_{II}$.

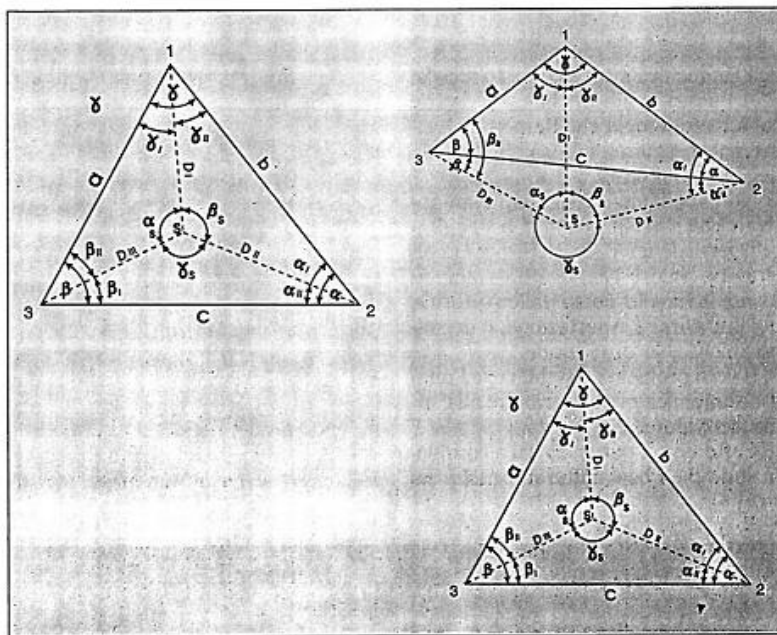
2) Dimostrazione

Con riferimento a fig. 1, dal triangolo 3-1-S risulta (vedi tabelle).

Dalla formula base riportata derivano le altre, relative ai singoli angoli, come da Tavola 1.

Per facilitare i calcoli si è predispo-

UN NUOVO METODO PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA CLASSICO DI SNELLIUS-POTHENOT



$$a : \text{sen}\alpha = D_{II} : \text{sen}\gamma \quad \text{da cui } a = \frac{D_{II} \text{ sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} \quad (1)$$

$$a : \text{sen}\alpha = c : \text{sen}\gamma \quad \text{da cui } a = \frac{c \text{ sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha} \quad (2)$$

Inoltre si ha: essendo uguali i secondi membri:

$$\frac{D_{II} \text{ sen}\alpha}{\text{sen}\gamma} = \frac{c \text{ sen}\alpha}{\text{sen}\gamma}$$

Di conseguenza:

$$D_{II} \text{ sen}\alpha \text{ sen}\gamma = c \text{ sen}\alpha \text{ sen}\gamma \quad \text{da cui} \quad D_{II} = \frac{c \text{ sen}\alpha \text{ sen}\gamma}{\text{sen}\alpha \text{ sen}\gamma} \quad (3)$$

Sempre da Fig. 1, dal triangolo 3 - S - 2 risulta:

$$D_{II} \operatorname{sen} \alpha_3 = c \operatorname{sen} \gamma \quad \text{da cui} \quad D_{II} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \gamma} \quad (4)$$

D'altra parte dalle relazioni (1) - (3) - (4) si ha:

$$\frac{c \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \gamma} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha_3} \quad \text{da cui} \quad c \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \gamma = a \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha_3$$

Inoltre:

$$c \operatorname{sen} \alpha_3 = \frac{a \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_3} \quad \text{da cui} \quad \frac{c \operatorname{sen} \alpha_3}{a \operatorname{sen} \gamma} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha_3} \quad (5)$$

$$\text{Infine si ha} \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{c \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3}{a \operatorname{sen} \gamma} \quad (6)$$

Elaborando la (6)

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{c}{a} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \gamma} \quad \text{e tenendo conto della (1) } \operatorname{sen} \gamma = \frac{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \gamma}$$

Tenendo conto della (6) si ha anche:

$$\frac{c \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3}{a \operatorname{sen} \gamma} = \frac{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \gamma} \quad \text{e svolgendo}$$

$$c \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3 = a \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3$$

Dal triangolo 1 - 2 - 3 risulta:

$$\beta = 200 - \gamma - \gamma - \alpha - \alpha \quad \text{e} \quad \beta_1 = 200 - \gamma - \alpha$$

$$\text{Di conseguenza: } \beta_1 - \beta = 2\beta - \gamma - \gamma - 2\alpha + \gamma + \gamma + \alpha + \alpha; \quad \text{cioè } \beta_1 - \beta = \gamma + \alpha$$

$$\text{Ponendo } \beta_1 - \beta = \alpha \quad \text{risulta} \quad \alpha = \gamma$$

Di conseguenza, dalla (5)

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\alpha - \gamma)} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \gamma} \quad \text{da cui} \quad \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \gamma - \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \gamma} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \gamma}$$

$$\text{e svolgendo a } \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \gamma = c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \gamma - c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \gamma$$

$$\text{Ponendo: } A = a \operatorname{sen} \gamma; \quad B = c \operatorname{sen} \alpha; \quad C = -c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha; \quad X = \operatorname{sen} \gamma$$

$$\text{la (7) diviene: } AX = B \operatorname{cos} \gamma + CX; \quad \text{siccome } \operatorname{cos} \gamma = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \gamma} \quad \text{si ha:}$$

$$AX = B \sqrt{1 - X^2} + CX; \quad \text{da cui } B \sqrt{1 - X^2} = X(A - C); \quad \text{cioè } B^2(1 - X^2) = X^2(A - C)^2$$

$$\text{Di conseguenza: } B^2 - B^2X^2 = X^2(A - C)^2; \quad B^2 = X^2[B^2 + (A - C)^2]; \quad X^2 = \frac{B^2}{(A - C)^2 + B^2}$$

$$\text{In fine risulta } X = \pm \sqrt{\frac{B^2}{(A - C)^2 + B^2}}$$

Tenendo conto delle posizioni fatte in precedenza si ha:

$$\operatorname{sen} \gamma = \pm \sqrt{\frac{(c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2}{(a \operatorname{sen} \gamma + c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)^2 + (c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2}}$$

eliminando la radice:

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{(c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2}{(a \operatorname{sen} \gamma + c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)^2 + (c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2} \quad \text{e sviluppando ulteriormente}$$

$$\operatorname{sen}^2 \gamma (a \operatorname{sen} \gamma + c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)^2 + \operatorname{sen}^2 \gamma (c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2 = (c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 \gamma (a \operatorname{sen} \gamma + c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)^2 = (c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2 - \operatorname{sen}^2 \gamma (c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha)^2$$

$$\text{siccome } \operatorname{sen}^2 \gamma = 1 - \operatorname{cos}^2 \gamma \quad \text{si ha:}$$

sto uno schema, sul quale si è riportato un esempio numerico. In esso sono indicati con $\alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3$ i tre angoli letti dal punto di osservazione «S» (stazione dello strumento misuratore degli angoli); essi sono gli unici dati rilevanti. Gli altri dati derivano da calcoli facilmente risolvibili conoscendo le coordinate dei punti 1-2-3.

3) Conclusioni

Con l'esplicito riferimento allo schema ed all'esempio riportati a Tav. 1, si può affermare:

a) seguendo lo schema suddetto appare subito facile la risoluzione dell'angolo cercato e da qui la corrispondente determinazione della distanza del punto di stazione da uno dei vertici noti (indicata con $D_1 - D_{II} - D_{III}$ - nello schema stesso), e conseguentemente delle coordinate del punto «S»;

b) applicando la formula relativa all'angolo prescelto si giunge subito al risultato desiderato;

c) calcolando i due angoli relativi allo stesso vertice del triangolo noto (1 - 2 - 3), si ha il riscontro e la conferma dell'esattezza dei calcoli, poiché la loro somma deve essere uguale all'angolo di quel medesimo vertice ($\alpha_1 + \alpha_{II} = \alpha$ ecc.). Esiste quindi la possibilità di controllo che non c'è col metodo classico;

d) misurando ripetutamente i tre angoli in S e compensando l'eventuale errore di chiusura ($\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 400$), si opera con i dati più attendibili possibile.

Poiché però tale compensazione potrebbe essere dovuta all'imprecisione di misura di uno, di due o di tutti e tre gli angoli (come nell'esempio di Tav. 1) è evidente che nella formula tradizionale che impiega due soltanto di essi, i risultati saranno un po' meno vicini al reale. Ciò non avviene con la formula proposta in quanto essa la considera tutti e tre. Di conseguenza il risultato viene influenzato anche dal contributo di calcolo da imputare al terzo angolo compensato.

Si è così in grado di ottenere risultati che raggiungono una maggior precisione ed attendibilità.

Esaminando il metodo prescritto secondo i moderni criteri, specialmente della topografia catastale, a prima vista, il metodo stesso, può sembrare ormai desueto e non più di attualità, specialmente disponendo oggi di longime-

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \gamma (a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega)^2 &= (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega)^2 - (1 - \cos^2 \gamma) (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega)^2 \\ \text{sen}^2 \gamma (a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega)^2 &= (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega)^2 - (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega)^2 + \cos^2 \gamma (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega)^2 \\ \text{sen}^2 \gamma (a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega)^2 &= \cos^2 \gamma (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega)^2 \end{aligned}$$

estraendo la radice dal primo e secondo membro si ha:

$$\text{sen} \gamma (a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega) = \cos \gamma (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega);$$

dividendo tutto per $\cos \gamma$

$$\frac{\text{sen} \gamma (a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega)}{\cos \gamma} = \frac{\cos \gamma (c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega)}{\cos \gamma}$$

$\text{tg} \gamma (a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega) = c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega$ quindi

$$\text{tg} \gamma = \frac{c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega}{a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega}; \quad \text{tg} \gamma = \frac{1}{\frac{a \text{ sen} \gamma_s + c \text{ sen} \alpha_s \cos \omega}{c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega}}$$

$$\text{tg} \gamma = \frac{1}{\frac{a \text{ sen} \gamma_s}{c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega} + \frac{1}{\text{tg} \omega}}$$

tri elettronici di precisione.

Da un esame invece più approfondito, anche in considerazione ed applicazione dei nuovi sistemi catastali con l'introduzione del concetto dei punti fiduciali, il metodo risulta comodo, sicuro ed estremamente attuale.

I punti fiduciali, sui quali è quasi sempre possibile accedere per misurare direttamente le distanze, non dispongono di coordinate sicure, analiticamente determinate; invece sono di ottima affidabilità le coordinate dei punti trigonometrici che risultano però al 90%, per non dire sempre, inaccessibili o troppo lontani per misurazioni dirette della distanza.

Nei casi poi in cui si adoperano punti trigonometrici o per poligonalali o quali punti fiduciali, a causa della loro inaccessibilità, occorre attuare specifici espedienti o le cosiddette «aper-

TAVOLA 1

RILIEVO del punto S con osaservaz. azimutali sui Δ M. Secco; M. Vecchio e Fratte Rosa

<p>M. Vecchio</p>	$\text{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\frac{b \text{ sen} \alpha_s}{a \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega} + \frac{1}{\text{tg} \omega}}$	<p>dove $\omega = \gamma_s - \gamma$ (Fig. 1 - 2) $\omega = \gamma_s - \gamma - 400$ (Fig. 3)</p>
<p>M. Secco</p>	$\text{tg} \alpha_{II} = \frac{1}{\frac{c \text{ sen} \alpha_s}{a \text{ sen} \gamma_s \text{ sen} \omega} + \frac{1}{\text{tg} \omega}}$	<p>dove $\omega = \beta_s - \beta$ (Fig. 1 - 2) $\omega = 400 - \beta_s - \beta$ (Fig. 3)</p>
<p>F. Rosà</p>	$\text{tg} \beta_I = \frac{1}{\frac{c \text{ sen} \beta_s}{b \text{ sen} \gamma_s \text{ sen} \omega} + \frac{1}{\text{tg} \omega}}$	<p>dove $\omega = \alpha_s - \alpha$ (Fig. 1 - 2) $\omega = 400 - \alpha_s - \alpha$ (Fig. 3)</p>
<p>F. Rosà</p>	$\text{tg} \beta_{II} = \frac{1}{\frac{a \text{ sen} \beta_s}{b \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega} + \frac{1}{\text{tg} \omega}}$	<p>dove $\omega = \gamma_s - \gamma$ (Fig. 1 - 2) $\omega = \gamma_s + \gamma - 400$ (Fig. 3)</p>
<p>M. Vecchio</p>	$\text{tg} \gamma_I = \frac{1}{\frac{a \text{ sen} \gamma_s}{c \text{ sen} \alpha_s \text{ sen} \omega} + \frac{1}{\text{tg} \omega}}$	<p>dove $\omega = \beta_s - \beta$ (Fig. 1 - 2) $\omega = \beta_s + \beta - 400$ (Fig. 3)</p>
<p>M. Secco</p>	$\text{tg} \gamma_{II} = \frac{1}{\frac{b \text{ sen} \gamma_s}{c \text{ sen} \beta_s \text{ sen} \omega} + \frac{1}{\text{tg} \omega}}$	<p>dove $\omega = \alpha_s - \alpha$ (Fig. 1 - 2) $\omega = \alpha_s + \alpha - 400$ (Fig. 3)</p>

tura e chiusura a terra» che, impiegando principalmente misure angolari, sono procedimenti simili al metodo proposto.

Coi nuovi sistemi catastali quindi, o prima o poi la rete dei fiduciali dovrà essere collegata a quella dei trigonometrici operando le opportune e complesse compensazioni, correzioni,

traslazioni, ecc. Perché, allora, non operare subito, sempre con l'appoggio sui punti fiduciali di prima perimetrazione, ma col metodo proposto, talché le sue suddette reti vengano collegate immediatamente?

Se ne avrebbe un sicuro vantaggio, una notevolissima abbreviazione dei tempi di attivazione dei nuovi concetti,

una maggior precisione dei rilievi, una più spinta ed accurata univocità dei risultati e la possibilità di immediati controlli. Da quanto sopra risulta, di conseguenza, l'attualità del sistema proposto che, una volta introdotto nei programmi dei computers, consentirà l'immediata e piena applicazione dei nuovi concetti catastali.

DATI		DATI	
DA CALCOLO		RILEVATI	
a = m.	<u>6.037,90</u>	$\alpha_s =$	<u>126. 63. 05,91</u>
b = m.	<u>3.485,35</u>	$\beta_s =$	<u>76. 39. 57,14</u>
c = m.	<u>6.739,67</u>	$\gamma_s =$	<u>196. 97. 36,95</u>
$\alpha =$	<u>70. 32. 50,3</u>		<u>400.00.00</u>
$\beta =$	<u>34. 49. 07,1</u>		
$\gamma =$	<u>95. 18. 42,6</u>		
	<u>200.00.00</u>		

$Az\ 1 \rightarrow S = Az\ 1 \rightarrow 2 + \gamma_{II} =$	
$(73.48.88,1 + 55.02.86,5) =$	
128.51.74,6	
$D_1 = m\ 3293,068$	
S	$x = \cos 128.51.74,6 \cdot D_1 - x_1$
	$y = \sin 128.51.74,6 \cdot D_1 + y_1$

3	<u>M. Secco</u>	2	<u>F. Rosa</u>	3	<u>M. Secco</u>
1	<u>M. Vecchio</u>	1	<u>M. Vecchio</u>	2	<u>F. Rosa</u>
X3	<u>- 16.997,48</u>	X2	<u>- 10.266,13</u>	X ₃	<u>- 16.997,48</u>
X1	<u>- 11.675,97</u>	X1	<u>- 11.675,97</u>	X ₂	<u>- 10.266,13</u>
Δx	<u>- 5.321,51</u>	Δx	<u>+ 1.409,84</u>	Δx	<u>- 6.731,35</u>
Y3	<u>21.094,30</u>	Y2	<u>20.429,10</u>	Y ₃	<u>21.094,30</u>
Y1	<u>18.241,62</u>	Y1	<u>18.241,62</u>	Y ₂	<u>21.429,10</u>
ΔY	<u>+ 2.852,68</u>	ΔY	<u>+ 3.187,48</u>	ΔY	<u>- 334,80</u>
Az. 1 - 3	<u>168.67.30,7</u>	Az. 1 - 2	<u>73.48.88,1</u>	Az. 2 - 3	<u>203.16.37,8</u>
D = a = m	<u>6.037,90</u>	D = b = m	<u>3.485,35</u>	D = c = m	<u>6.739,67</u>

CASO DI FIG. 1

$$\begin{aligned}
 \alpha_I) \omega &= \frac{101.78.94,35}{41.90.50,04} ; \alpha_I = \text{Arc. tg. } \frac{101.78.94,35}{41.90.50,04} ; \alpha_I = \frac{68.57.56,47}{1.74.93,93} \\
 \alpha_{II}) \omega &= \frac{56.30.55,61}{41.90.50,04} ; \alpha_{II} = \text{Arc. tg. } \frac{56.30.55,61}{41.90.50,04} ; \alpha_{II} = \frac{1.27.69,11}{33.21.37,88} \\
 \beta_I) \omega &= \frac{101.78.94,35}{56.30.55,61} ; \beta_I = \text{Arc. tg. } \frac{101.78.94,35}{56.30.55,61} ; \beta_I = \frac{33.21.37,88}{40.15.56,11} \\
 \beta_{II}) \omega &= \frac{41.90.50,04}{56.30.55,61} ; \beta_{II} = \text{Arc. tg. } \frac{41.90.50,04}{56.30.55,61} ; \beta_{II} = \frac{40.15.56,11}{55.02.86,50} \\
 \gamma_I) \omega &= \frac{101.78.94,35}{41.90.50,04} ; \gamma_I = \text{Arc. tg. } \frac{101.78.94,35}{41.90.50,04} ; \gamma_I = \frac{68.57.56,47}{1.74.93,93} \\
 \gamma_{II}) \omega &= \frac{56.30.55,61}{41.90.50,04} ; \gamma_{II} = \text{Arc. tg. } \frac{56.30.55,61}{41.90.50,04} ; \gamma_{II} = \frac{1.27.69,11}{33.21.37,88}
 \end{aligned}$$

$$D_I = \frac{a \sin \beta_{II}}{\sin \alpha_s} = \frac{b \sin \alpha_I}{\sin \beta_s} = m. \frac{3.293,068}{3.293,068} + \frac{3.293,068}{3.293,068} : 2 = \frac{3.293,068}{3.293,068}$$

$$D_{II} = \frac{b \sin \gamma_{II}}{\sin \beta_s} = \frac{c \sin \beta_I}{\sin \gamma_s} = m. \frac{2.844,599}{2.844,599} + \frac{2.844,599}{2.844,599} : 2 = \frac{2.844,599}{2.844,599}$$

$$D_{III} = \frac{a \sin \gamma_I}{\sin \alpha_s} = \frac{c \sin \alpha_{II}}{\sin \gamma_s} = m. \frac{3.896,927}{3.896,927} + \frac{3.896,927}{3.896,927} : 2 = \frac{3.896,927}{3.896,927}$$

N.B. se l'angolo cercato è superiore all'angolo retto (100) la formula dà l'angolo supplementare (da sottrarre da 200) - Ciò avviene per $\omega > 200$ e risultato negativo